979. Lie algebra ノ Faktorensystem

安倍　亮

通常ノ群論ニ於テ,「アラユル可能ナ」群ノ構造ヲ決定シヨウト思ヘバ,先ヅアラユル単純群ヲ決定シテ,次ニソレラヲ Kompositionsfaktoren ニモツ群ヲ合成スルコトガ問題ニナル。ソコデ Normalteiler $\mathfrak{N}$ ト Faktorgruppe $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ヲ與ヘテ $\mathfrak{G}$ ヲ決メルコトガ問題ニナルガ,ソレハ Schreier ノ Erweiterungstheorie ニ依ッテ少クトモ形式的ニハ答ヘラレル。Zassenhaus ガ指摘シテオル様ニ (Über Lie'sche Ringe mit Primzahlcharakteristik (Hamburg XIII, 1939) 5頁), Schreier ノ理論ハ (Lie 群ヲ仲介トシテ) Lie algebra ニ於テモ analog ニ建テルコトガ出来ルノハ殆ンド明デアラウ。

ソレハ「アラユル可能ナ」Lie algebra ノ構造ノ決定ニ,少クトモ形式的ニハ一ツノ手段ヲ提供スルデアラウ。而モ有限群ナドノバアヒヨリ簡単ナコトハ,Lie Algebra $\mathfrak{R}$ ノ Radikal ヲ $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}$ ノ逐次ノ Ableitung ヲ $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$, …… トセバ

$$\mathfrak{R} \supset \mathfrak{r} \supset \mathfrak{r}' \supset \cdots \supset \mathfrak{r}^{(m)} = 0$$

ナル Hauptreihe ($\mathfrak{R}$ ノ Ideal ノ Reihe) ガアッテ, $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ ノミガ halbeinfach, ソノ他ノ Faktor ハ可換デアル。先ヅ下カラ可換ナ Faktor ニヨル Erweiterung ヲ繰返シテ一般ノ auflösbar ナ Lie Algebra ヲ決定スル。(勿論ソレが実行出来ルト云フノデハナイ。zweistufig meta-abelsch 位デモ既ニカナリ困難デアル。ソシテ最後ノ $\mathfrak{v}$ カラ $\mathfrak{R}$ ヘノ Schritt ハ所謂 Levi ノ定理, Erweiterungstheorie ノ言葉デ言ヘバ「$\mathfrak{R}$ ハ $\mathfrak{v}$ ノ上デ zerfallen スル」ニ依ッテ可ナリ容易ニナル。*)

§1. Faktorensystem

係数体PハRN意ノ体トスル。Pノ上ノ Lie-algebra

$$\mathfrak{R} = u_1P + \cdots\cdots + u_rP + v_1P + \cdots\cdots + v_nP$$

ノ中デ

$$\mathfrak{v} = v_1P + \cdots\cdots + v_nP$$

ガ Ideal ヲナストスル; $\mathfrak{R}\circ\mathfrak{v}\subset\mathfrak{v}$. $\mathfrak{f} = \mathfrak{R}/\mathfrak{v}$ トシテ、ソノ構造ハ

(1) $\bar{u}_i\circ\bar{u}_j = \bar{u}_k\gamma_{ij}^k, \quad \gamma_{ij}^k\in P$

デアラハストスル。但シ $\bar{u}_i$ ハ u_i ノ mod $\mathfrak{v}$ ノ Klasse デアル。又 $\bar{u}_k\gamma_{ij}^k$ ハ $\sum_{k=1}^{r}\bar{u}_k\gamma_{ij}^k$ ヲアラハス。以下同様。扨 $v\in\mathfrak{v}$ ニ對シテ

(2) $u_i\circ v = D(u_i)v \in \mathfrak{v}$

---

*) 勿論上カラ作ッテ行ク方法モ考ヘラレル。即チ $\mathfrak{R}/\mathfrak{v}, \mathfrak{R}/\mathfrak{v}', \ldots\ldots, \mathfrak{R}/\mathfrak{v}^{(m-1)}$, $\mathfrak{R}$ ヲ順ニ作ルノデアル。此ノ時ハ可換 Ideal ノ擴大ノミガ繰返サレル。

$\mathfrak{M}$ ノ一ツノ一次変換 $D(u_i)$ ヲ生ズルガ，之レハ $v\,w \in \mathfrak{v}$ トスルトキ，u_i, v, w ニ関スル *Jacobi* 條件ニヨッテ

I. $D(u_i)(v \circ w) = D(u_i)v \circ w + v \circ D(u_i)w$

ヲ満足シナケレバナラナイ。即チ $D(u_i)$ ハ $\mathfrak{v}$ ノ無限小自己同型、或ハ <u>*Derivation*</u> デアル。次ニ $u_i \circ u_j$ ヲ考ヘルニ，(1) ニ依ッテ $u_i \circ u_j \equiv u_k \gamma^k_{ij}\ (\mathfrak{v})$ デアルカラ

(3) $\quad u_i \circ u_j = u_k \gamma^k_{ij} + a_{ij}, \quad a_{ij} \in \mathfrak{v}$

$u_i \circ u_j = -u_j \circ u_i$，$u_i \circ u_i = 0$ デアルカラ

II. $a_{ij} = -a_{ji}, \quad a_{ii} = 0$

又 u_i, u_j, v ニ関スル，*Jacobi* 條件

$$u_i \circ (u_j \circ v) - u_j \circ (u_i \circ v) = (u_i \circ u_j) \circ v$$

ニ (2) 及 (3) ヲ代入シテ

III. $D(u_i)D(u_j)v - D(u_j)D(u_i)v = D(u_k)v\,\gamma^k_{ij} + a_{ij} \circ v$

又 u_i, u_j, u_k ニ関スル *Jacobi* 條件ニ於テ

$$u_i \circ (u_j \circ u_k) = u_i \circ (u_l \gamma^l_{jk} + a_{jl})$$

$$= u_m \gamma^m_{il} \gamma^l_{jk} + a_{il} \gamma^l_{jk} + D(u_i) a_{jk}$$

デアルカラ，i, j, k ヲ循環シテ加ヘ合セテ，（第一項ノ和ハ 0）

IV. $a_{il}\gamma^l_{jk} + a_{jl}\gamma^l_{ki} + a_{kl}\gamma^l_{ij} + D(u_i)a_{jk}$

$$+ D(u_j)a_{ki} + D(u_k)a_{ij} = 0$$

定義. Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ノ Basis ニ對應シテ Lie Algebra $\mathfrak{v}$ ノ Derivation $D(u_i)$ ガアリ $\mathfrak{v}$ ノ r^2 ケノ元 a_{ij} ガ II, III, IV ノ條件ヲ滿足スル a_{ij} ノ System ヲ zu $\mathfrak{g}$ gehöriges Faktorensystem aus $\mathfrak{v}$ ト名付ケ, $(D(u_i), a_{ij})$ ト書クコトニスル。

$\mathfrak{R}/\mathfrak{v}\cong\mathfrak{g}$ ナル Lie-Algebra $\mathfrak{R}$ ガアレバ, 上ノ様ニシテ Faktorensystem ガ定マルガ, 逆ニ Faktorensystem カラ $\mathfrak{R}$ ガ作レル事ハ上ノ議論ヲ逆ニ辿レバヨイ。即チ

$\boxed{\text{定理 1}}$ Lie-Algebra $\mathfrak{g}=\bar{u}_1P+\cdots\cdots+\bar{u}_rP$, $\bar{u}_i\circ\bar{u}_j=\bar{u}_k\gamma^k_{ij}$ ノ階数 r ダケノ個數ノ, Lie-Algebra $\mathfrak{v}$ ノ Derivation $D(u_i)$, $i=1,\cdots\cdots,r$, 即チ

$$\text{I}\quad D(u_i)(v\circ w)=D(u_i)v\circ w+v\circ D(u_i)w;\qquad v,w\in\mathfrak{v}$$

ヲ滿足スル $\mathfrak{v}$ ノ一次変換 $D(u_i)$ ト, r^2 個ノ $\mathfrak{v}$ ノ元 a_{ij} ガアッテ

$$\text{II}\quad a_{ij}=-a_{ji}\,,\quad a_{ii}=0$$

$$\text{III}\quad D(u_i)D(u_j)v-D(u_j)D(u_i)v=D(u_k)v\gamma^k_{ij}+a_{ij}\circ v$$

$$\text{IV}\quad a_{il}\gamma^l_{jk}+a_{jl}\gamma^l_{ki}+a_{kl}\gamma^l_{ij}+D(u_i)a_{jk}+D(u_j)a_{ki}+D(u_k)a_{ij}=0$$

ヲ滿足スルトキ, 換言スレバ $(D(u_i), a_{ij})$ ガ $\mathfrak{g}$ ニ属

ルガ ノ Faktorensystem トルトキ,

$$\mathfrak{K} = u_1 \mathrm{P} + \cdots\cdots + u_\gamma \mathrm{P} + \mathfrak{v}$$

ハ計算規則

$$(2) \qquad u_i \circ v = - v \circ u_i = D(u_i) v, \quad v \in \mathfrak{v},$$

$$(3) \qquad u_i \circ u_j = u_k \gamma_{ij}^k + a_{ij}$$

ニヨッテ Lie-Algebra ニナリ、$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{K}/\mathfrak{v}$ デアル。逆ニ $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{K}/\mathfrak{v}$ ナル $\mathfrak{K}$ ハ総テ此様ニシテ得ラレル。

証明. $\mathfrak{K}$ ガ実際 Lie-Algebra ニナル事. $x \circ y = - y \circ x$, $x \circ x = 0$ ハ, u_i, u_j ニ関シテハ $\gamma_{ij}^k = -\gamma_{ji}^k$ ト II ヨリ, u_i, v ニ関シテハ $\mathfrak{K}$ ニオケル計算規則ノ定義ヨリ, v, w ($\in \mathfrak{v}$) ニ関シテハ $\mathfrak{v}$ ガ始メカラ Lie-Algebra ナルコトヨリ出ル。

又 Jacobi 條件ハ, u_i, u_j, u_k ニ関シテハ IV ヨリ, u_i, u_j, v ニ関シテハ III ヨリ, u_i, v, w ニ関シテハ I ヨリ, $\mathfrak{v}$ ノ中デハ元々 $\mathfrak{v}$ ノ Jacobi 條件ヨリ夫々出ル。

§2. Assoziierte Systeme, Zerfallen.

$\bar{u}_i$ ノ代表トシテ u_i ノ代リニ $u_i^* = u_i + t_i$, $t_i \in \mathfrak{v}$ ヲトレバ

$$\begin{aligned} D(u_i^*) v = u_i^* \circ v &= u_i \circ v + t_i \circ v \\ &= D(u_i) v + t_i \circ v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_i^* \circ u_j^* &= u_i \circ u_j + u_i \circ t_j - u_j \circ t_i + t_i \circ t_j \\ &= u_k^* \gamma_{ij}^k - t_k \gamma_{ij}^k + a_{ij} + D(u_i) t_j \\ &\qquad - D(u_j) t_i + t_i \circ t_j \end{aligned}$$

トナル。ソコデ

定義. $\mathfrak{G}$ ニ屬スル $\mathfrak{v}$ ノ二ツノ Faktorensystem $(D(u_i), a_{ij})$, $(D(u_i^*), a_{ij}^*)$ ガアルトキ，ソノ間ニ

(AI) $D(u_i^*)v = D(u_i)v + t_i \circ v, \quad v \in \mathfrak{v}$

(AII) $a_{ij}^* = a_{ij} - t_k \gamma_{ij}^k + D(u_i)t_j - D(u_j)t_i + t_i \circ t_j$

ヲ滿足スル $t_1, \text{-----}, t_r \in \mathfrak{v}$ ガ存在スレバ，之等ハ互ニ assoziiert デアルトイフ。*) コノコトヲ

$$(D(u_i), a_{ij}) \sim (D(u_i^*), a_{ij}^*)$$

ト書クコトニスル。

定理 2 $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^*$ ハ共ニ $\mathfrak{v}$ ノ $\mathfrak{G}$ ニヨル拡大，即チ $\mathfrak{R}/\mathfrak{v} \cong \mathfrak{G}$, $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{v} \cong \mathfrak{G}$ ナル Ideal $\mathfrak{v}$ ヲ持ツトスル。$\mathfrak{v}$ ヲ elementweise ニ固定シ且ツ $\mathfrak{R}/\mathfrak{v}$ ト $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{v}$ ノ $\mathfrak{G}$ デ對應スル Restklasse ガ互ニ對應スルヤウナ $\mathfrak{R}$ ト $\mathfrak{R}^*$ ノ同型對應ガアルトキ，$\mathfrak{R}$ ト $\mathfrak{R}^*$ ハ $\mathfrak{v}$-isomorph デアルト云フコトニスル。$\mathfrak{R}$ ト $\mathfrak{R}^*$ トガ $\mathfrak{v}$-isomorph ナル必要且ツ十分ナ條件ハ，$\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^*$ ニ對應スル Faktorensystem ガ互ニ assoziiert ナル事デアル。

證明　殆ンド明デアラウ。

系 $\mathfrak{R}/\mathfrak{v}$ ノ Restklasse ノ代表ガ夫自身 $\mathfrak{R}$ ノ Teilalgebra ヲナス様ニ取レルトキ，$\mathfrak{R}$ ハ $\mathfrak{v}$ ノ上デ

---

*) assoziiert ナル關係ガ，反射律，對稱律，推移律ヲ滿足スルコトハ，ソノ意味カラ殆ンド明カデアラウ。勿論 AI, II ダケカラ形式的ニ證明スルコトモ出來ル。

zerfallen スルト云フ。ソノタメニハ，Faktorensystem ニ對シテ

$$(\mathrm{Z})\qquad a_{ij}=t_k\gamma_{ij}^k-D(u_i)t_j+D(u_j)t_i-t_i\circ t_j$$

ヲ満足スル $t_1,\cdots\cdots,t_r\in\mathfrak{A}$ ガ存在スルコトガ必要且十分デアル。

§3. Faktorensystem ノ存在ニ關シテ

$\mathfrak{A}$ ト $\mathfrak{g}$ トヲ與ヘタトキ，$\mathfrak{g}$ ニ屬スル $\mathfrak{A}$ ノ Faktorensystem ハ少クトモ一ツハ何時デモ存在スル。ソレハ直和 $\mathfrak{g}+\mathfrak{A}$ ニ對應スルモノデ，$D(u_i)=0,\ a_{ij}=0$ デアル。

併シ r ケノ Derivation ノ集合 $D(u_1),\cdots\cdots,D(u_r)$ ヲ勝手ニ與ヘテモ，必ズシモ $(D(u_i),\ a_{ij})$ ノ形ノ Faktorensystem ガアルカドウカハ分ラナイ。一般ニ $v\in\mathfrak{A}$ ガ $\mathfrak{A}$ ニ生ズル innere Der. ヲ $\underline{v}$ ト書クコトニスル。$\underline{v}$ ノ全体ハ $\mathfrak{A}$ ノ Der. 全体ノ作ル Lie 環 $\mathfrak{L}$ ノ中デ Ideal $\mathfrak{I}$ ヲ作ル。條件 III ハ

$$\mathrm{III}\qquad D(u_i)\circ D(u_j)=D(u_k)\gamma_{ij}^k+\underline{a_{ij}}$$

ト書ケルカラ，兎モ角

$$D(u_i)\circ D(u_j)\equiv D(u_k)\gamma_{ij}^k\ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{I})$$

デナケレバナラナイ。換言スレバ $\bar{u}_i\longrightarrow D(u_i)\ \mathrm{mod}\ \mathfrak{I}$ ハ $\mathfrak{g}$ ノ $\mathfrak{L}/\mathfrak{I}$ 内ヘノ表現*) デナケレバナラナイ。少クトモ之ハ $D(u_i)$ ノ満足スベキ必要條件デアル。サテ斯様ナ $D(u_i)$ ガ與ヘラレヽバ，III カラ $\underline{a_{ij}}$ ガキマル；從ツテ

Zerfallen スルト云フ。ソノタメニハ，Faktorensystem ニ對シテ

$$(\mathrm{Z}) \quad a_{ij} = t_k \gamma_{ij}^k - D(u_i)t_j + D(u_j)t_i - t_i \circ t_j$$

ヲ滿足スル $t_1, \cdots\cdots, t_r \in \mathfrak{V}$ ガ存在スルコトガ必要且十分デアル。

§3. Faktorensystem ノ存在ニ關シテ

$\mathfrak{V}$ ト γ トヲ與ヘタトキ，γ ニ屬スル $\mathfrak{V}$ ノ Faktorensystem ハ少クトモ一ツハ何時デモ存在スル。ソレハ直和 $\gamma + \mathfrak{V}$ ニ對應スルモノデ，$D(u_i) = 0$, $a_{ij} = 0$ デアル。

併シ r ケノ Derivation ノ集合 $D(u_1), \cdots\cdots, D(u_r)$ ヲ勝手ニ與ヘテモ，必ズシモ $(D(u_i), a_{ij})$ ノ形ノ Faktorensystem ガアルカドウカハ分ラナイ。一般ニ $v \in \mathfrak{V}$ ガ $\mathfrak{V}$ ニ生ズル innere Der. ヲ $\underline{v}$ ト書クコトニスル。$\underline{v}$ ノ全体ハ $\mathfrak{V}$ ノ Der. 全体ノ作ル Lie 環 $\mathfrak{L}$ ノ中デ Ideal $\mathfrak{J}$ ヲ作ル。條件 III ハ

$$\text{III} \quad D(u_i) \circ D(u_j) = D(u_k)\gamma_{ij}^k + \underline{a_{ij}}$$

ト書ケルカラ，兎モ角

$$D(u_i) \circ D(u_j) \equiv D(u_k)\gamma_{ij}^k \ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{J})$$

デナケレバナラナイ。換言スレバ $\bar{u}_i \longrightarrow D(u_i) \bmod \mathfrak{J}$ ハ γ ノ $\mathfrak{L}/\mathfrak{J}$ 内ヘノ表現*) デナケレバナラナイ。少クトモ之ハ $D(u_i)$ ノ滿足スベキ必要條件デアル。サテ斯樣ナ $D(u_i)$ ガ與ヘラレヽバ，III カラ $\underline{a_{ij}}$ ガキマル；從ツテ

a_{ij} ガ mod. $\mathfrak{z}(\mathfrak{v})$（$\mathfrak{v}$ ノ Zentrum）デ一意的ニキマル。a_{ij} ヲ mod $\mathfrak{z}(\mathfrak{v})$ デ適當ニトッテ條件 IV ガ成立ツ樣ニデキレバ，Faktorensystem ガ作レタコトニナルガ，夫ハ一般ニハ出來ルカドウカ分ラナイ。從ツテ $\mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{E}/\mathfrak{N}$ ノ表現ナル $D(u_i)$ ニ對シテモ，必ズ Faktorensystem ガアルカドウカハ分ラナイ。然シナガラ，次ノ定理ガ成立ツ。

定理 3　III ガ成立ツナラバ，IV ノ左辺

$$a_{ijk} = a_{il}\gamma^{l}_{jk} + a_{jl}\gamma^{l}_{ki} + a_{kl}\gamma^{l}_{ij}$$
$$+ D(u_i)a_{jk} + D(u_j)a_{ki} + D(u_k)a_{ij}$$

ハ $\mathfrak{v}$ ノ Zentrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{v})$ ニ屬スル。

［証明］　$\underline{a_{ijk}} = 0$ ヲ云ヘバヨイ。III カラ

$$\underline{a_{ij}} = D(u_i)\circ D(u_j) - D(u_k)\gamma^{k}_{ij}$$

デアルカラ

$$\underline{a_{il}\gamma^{l}_{jk}} = D(u_i)\circ D(u_l)\gamma^{l}_{jk} - D(u_m)\gamma^{m}_{il}\gamma^{l}_{jk} \text{ 等}$$

$$\underline{D(u_i)a_{jk}} = D(u_i)\circ \underline{a_{jk}} = D(u_i)\circ(D(u_j)\circ D(u_k))$$
$$- D(u_i)\circ D(u_l)\gamma^{l}_{ij} \text{ 等.}$$

i, j, k ヲ循環シテ加ヘ合セルト

$$\sum_{(i,j,k)} D(u_i)\circ(D(u_j)\circ D(u_k)) = 0$$

及ビ　$$\sum_{(i,j,k)} \gamma^{m}_{il}\gamma^{l}_{jk} = 0$$

---

*) 前頁脚註　表現 = Homomorphismus !

ヨリ　$\underline{a_{ijk}} = 0$　　q.e.d.

從ッテ特別ナ場合ニハ Faktorensystem ノ存在ガウマク云ヘル。例ヘバ

i) $\mathfrak{z}(\mathfrak{v}) = (0)$ ノ時

コノトキハ $\bar{u}_i \to D(u_i) \bmod \mathfrak{J}$ ガ表現ニナッテ居レバ，a_{ij} ハ III カラ一意的ニ決ル。ソノ a_{ij} ヲ用ヒテ作ッタ IV ノ左辺 a_{ijk} ハ定理3ニヨリ Zentrum ニ属スルカラ 0，即チ IV ハ自働的ニ満足サレ，從ッテ $(D(u_i), a_{ij})$ ハ Faktorensystem ニナル。$D(u_i)$ ノ代リニ mod $\mathfrak{J}$ ノ別ノ Vertreter ヲトッテモ，結局 assoziiert ナ System ガ得ラレルニ過ギナイ。

即チ

$\boxed{\text{定理4}}$　「$\mathfrak{v}$ ガ ohne Zentrum ナラバ，$\mathfrak{r}$ ノ $\mathfrak{G}/\mathfrak{v}$ 内ヘノ表現ト $\mathfrak{v}$ ノ $\mathfrak{r}$ ニヨル Erweiterung トガ一對一ニ對應スル。」(特ニ零表現ニハ直和 $\mathfrak{v} + \mathfrak{r}$ ガ對應スル)

ii) $\mathfrak{v}$ ガ abgeschlossen ナル時。

即チ $\mathfrak{z}(\mathfrak{v}) = (0)$ デ而モ $\mathfrak{v}$ ノ Derivation ガ盡ク inner 即チ $\mathfrak{G} = \mathfrak{J}$ ナルバアヒデアル。此ノトキ $\mathfrak{r}$ ノ $\mathfrak{G}/\mathfrak{J}$ 内ヘノ表現ハ零表現シカナイ。故ニドンナ $\mathfrak{r}$ ヲトッテキテモ $\mathfrak{v}$ ノ $\mathfrak{r}$ ニヨル Erweiterung ハ唯一ツ，即チ直和 $\mathfrak{r} + \mathfrak{v}$ デアル。

$\boxed{\text{定理5}}$　「Lie-algebra $\mathfrak{K}$ ノ abgeschlossen ナ Ideal $\mathfrak{v}$ ハ必ズ直和因子デアル。即チ $\mathfrak{K} = \mathfrak{v} + \mathfrak{r}$

ナル Ideal $\mathfrak{J}$ ガ必ズアル。」

係數体ノ Charakteristik ガ 0 ナラ halbeinfach ナ Lie-Algebra ハ abgeschlossen デアル。従ッテ halbeinfach ナ Ideal ガアレバ，ソレハ必ズ直和因子デアル。

附記 群論ノ場合ハ $\mathfrak{N}=(A, B, \cdots\cdots)$ ヲ $\mathfrak{R}=(\sigma, \tau, \cdots\cdots)$ デ erweitern スルトシテ，σ = $\mathfrak{N}$ ノ Autom. S_σ ヲ對應セシメ，ソレト $\mathfrak{N}$ ノ元 $C_{\sigma,\tau}$ トガ §1 ノ III ニ相應シテ III′. $(A^{S_\tau})^{S_\sigma}=A^{C_{\sigma,\tau}S_{\sigma\tau}}$，IV ニ相應シテ IV′.

$$C_{\sigma,\tau}C_{\sigma\tau,\rho}C_{\tau,\rho}^{-S_\sigma}C_{\sigma,\tau\rho}^{-1}=e$$

ヲ滿足スルトキ，$(S_\sigma, C_{\sigma,\tau})$ ヲ Faktorensystem ト云フ。本節ニ述ベタコトハスベテ群デモ成立ツ。$\mathfrak{N}$ ノ Automorphismengruppe ヲ $A_\mathfrak{N}$，ソノ中 innere Autom. ノ作ル Normalteiler ヲ $J_\mathfrak{N}$ トセバ，先ヅ III′ カラ $\sigma\longrightarrow S_\sigma$ ハ $\mathfrak{R}\longrightarrow A_\mathfrak{N}/J_\mathfrak{N}$ ノ表現デナケレバナラナイ。ソノトキ III′ ヲ滿足スル $C_{\sigma,\tau}$ ヲトレバ，定理3ニ相應シテ，IV′ ノ左辺ガ $\mathfrak{z}(\mathfrak{N})$ ニ屬スル。定理4′「$\mathfrak{z}(\mathfrak{N})=(e)$ ナラ，$\mathfrak{R}\longrightarrow A_\mathfrak{N}/J_\mathfrak{N}$ ノ表現ト $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{R}$ ニヨル Erweiterung トガ一對一ニ對應スル」定理5′「$\mathfrak{N}$ ガ abgeschlossen，即チ $\mathfrak{z}(\mathfrak{N})=(e)$, $A_\mathfrak{N}=J_\mathfrak{N}$ ナラ，$\mathfrak{N}$ ヲ如何ナル $\mathfrak{R}$ デ拡大シテモ直積 $\mathfrak{N}\times\mathfrak{R}$ シカナイ」モ成立ツ。

§4. 可換 Ideal ノ擴大。

$\mathfrak{J}$ が可換ナル場合ヲ考ヘル。コノトキハ $\bar{u}_i$ ノ Vertreter u_i ノ取リ方如何ニ係ハラズ，$D(u_i)$ ハ変ラナイカラ $D(u_i)$ ノ代リニ D_i ト書ク。I—IV ハ

I　自ラ満足サレル。

II　$a_{ij}=-a_{ji},\ a_{ii}=0$

III　$D_iD_j-D_jD_i=D_k\gamma_{ij}^{k}$

IV　$a_{il}\gamma_{jk}^{l}+a_{jl}\gamma_{ki}^{l}+a_{kl}\gamma_{ij}^{l}+D_ia_{jk}+D_ja_{ki}+D_ka_{ij}$

$=0$

即チIIIハ簡単ニ $\bar{u}_i\longrightarrow D_i$ が $\mathfrak{g}$ ノ表現ナルコトヲアラハス；$\mathfrak{J}$ ヲ表現加群トスル表現デアル。表現 $u_i\rightarrow D_i$ が與ヘラレレバ，$(D_i,0)$ 即チ zerfallen スル Faktorensystem ハ何時デモ存在スル。

assoziiert ノ條件ノ中 (AI) ハ $D_i^{*}=D_i$ トナリ。$(D_i,a_{ij})\sim(D_i,a_{ij}^{*})$ ノ條件ハ

(AII)　$a_{ij}^{*}=a_{ij}-t_k\gamma_{ij}^{k}+D_it_j-D_jt_i$ ナル

$t_1,\cdots\cdots,t_r$ ノ存在デアル。Zerfallen ノ條件ハ

(Z)　$a_{ij}=t_k\gamma_{ij}^{k}-D_it_j+D_jt_i$

トナル。

$\boxed{\text{定理6}}$　$\mathfrak{J}$ が可換ナルトキハ，$\mathfrak{g}$ ノ $\mathfrak{J}$ ヲ表現加群トスル任意ノ表現 $\bar{u}_i\longrightarrow D_i$ ニ對シ (D_i,a_{ij}) ノ形ノ Faktorensystem ハ存在スル。

D_i ヲ決メタ時 (D_i,a_{ij}) ノ全体ハ

$$(D_i, a_{ij}) + (D_i, b_{ij}) = (D_i, a_{ij} + b_{ij})$$

ナル加法ニヨリ加法群ヲ作ル。a_{ij} ハ一次方程式系II, IV ノ解ダカラ, a_{ij} ノ群ハアル有限次元ノ Vektorgruppe ヲナス。ソノ中デ, zerfallen スル。

$$a_{ij} = t_k \gamma_{ij}^k - D_i t_j + D_j t_i$$

ハ Vektoruntergruppe ヲナス。従ッテ assoziiert ナモノヲ Klasse ニ纏メテモ Vektorgruppe ヲナス。即チ $\mathfrak{v}$ ノ $\mathfrak{G}$ ニヨル拡大ニ於テ D_i ヲキメレバ, 拡大全体ガ上ノ加法デ Vektorgruppe ヲナス。

［注意］ $\mathfrak{v}$ ガ一般ナルトキハ, $D(u_i)$ ヲ決メテモ, Faktorensystem a_{ij} ト b_{ij} ノ和ハ Faktorensystem ニナラナイ。ソレハ III ガ満足サレナイカラデアル。モシ $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/\mathfrak{J}$ ノ Bild ガ $\mathfrak{J}$ ノ上デ zerfallen スレバ,

$$D(u_i) \circ D(u_j) = D(u_k) \gamma_{ij}^k$$

ナルヤウニ $D(u_i)$ ガ選ベル。コノ $D(u_i)$ ヲ固定スレバ III ハ $\underline{a_{ij}} = 0$ 即チ $a_{ij} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{v})$ デアリ, ソレト II, IV ノ解ナル a_{ij} ハ此ノ時ハ加法デ Vektor 群ヲナス。又 $D(u_i)$ ヲ固定シテアルカラ $t_i \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{v})$ デ, シタガッテ (Z) ハ本節ノ (Z) ノ形ニナリ, zerfallen スルモノハ部分群ニナル。カクシテ始メニ與ヘタ $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/\mathfrak{J}$ ニ對應スル拡大全体ガ Vektor 群ヲナス。$\mathfrak{v}$ ガ可換ナルバアヒニハ, $\mathfrak{J} = (0)$ トナルカラ, $\mathfrak{G}$ ノスベテノ部分環ハ $\mathfrak{J}$ ノ上デ zerfallen スル. 即チ上ノ特別ノ場合ニナル。

例1. γ: halbeinfach

係數體ノ標數ガ0ナラ必ズ zerfallen スル。ソレハ以前ニ詳シク述ベタコトガアルガ，要スルニ、表現 D_i ニ對シテ IV ヲ滿足スル a_{ij} ガアレバ，必ズ(Z)ノ形ニナルコトヲ云ヘバヨイ。ソコデ IV ヲ a_{ij} ニツイテ解クタメニ IV ノ兩辺ニ D^k ヲカケテ k デ加ヘル。途中ノ計算ヲ略スガ結果ハ

$$C a_{ij} + D^k a_{kl}\gamma^l_{ij} - D_i(D^k a_{kj}) + D_j(D^k a_{ki}) = 0$$

トナル。$C = D^k D_k$ ハ Casimir 行列ト呼バレルモノデアル。表現ガ零表現ヲ含マナイナラ，C ハ逆ガアッテ

$$t_i = -C^{-1} D^k a_{ki}$$

ト置ケバ直チニ(Z)ガ成立ツ。C ガ零表現ヲ含ム場合モ容易ニ出ル。之レカラ，一般ニ可解ナ $\mathfrak{r}$ ノ halbeinfach ナ γ ニヨル Erweiterung ガ必ズ zerfallen スルト云フ Levi ノ定理モ直チニ得ラレル。

例2. γ: 可換　即チ $\mathfrak{r}$ ガ (zweistufig) meta-abelsch ノ場合

II　$a_{ij} = -a_{ji},\quad a_{ii} = 0$

III　$D_i D_j = D_j D_i$

IV　$D_i a_{jk} + D_j a_{ki} + D_k a_{ij} = 0$

(Z)　$a_{ij} = -D_i t_j + D_j t_i$

一例トシテ $\mathfrak{r} = (v)$ ガ一次元ノトキヲ考ヘテ見ヨウ。

$\mathfrak{G}$ノ一次ノ表現ハ

i) 零表現カ

ii) $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_{r-1}$ノ trace ナ表現，但シ$\mathfrak{G}_{r-1}$ハ$r-1$次元ノIdeal (= Teilmodul)

$\mathfrak{G}_{r-1}=(u_2, u_3, \cdots\cdots, u_r)$ナル如クトリ$u_i$ノ係数ヲ適當ニスレバ，$D_1 v=v$, $D_2 v=0, \cdots\cdots, D_r v=0$

i) IV ハ自ラ滿足サレル。故ニ$a_{ij}=-a_{ji}$, $a_{ii}=0$ 以外，$\{a_{ij}\}$ハ全ク任意デアル．

(Z) ハ$a_{ij}=0$トナル。∴ Erweiterung ノ Vektorgruppe ノ次元ハ$\{a_{ij}\}$ノ独立ナ解ノ数，即チ$\frac{1}{2}r(r-1)$デアル。

$$\begin{cases} u_i \circ u_j = v\alpha_{ij}, \quad \alpha_{ij}=-\alpha_{ji}, \ \alpha_{ii}=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i, j=1, \cdots\cdots, r \\ u_i \circ v = 0 \end{cases}$$

ii) $i, j, k \neq 1$ナラ IV ハ自然ニ成立ッテ居ル。故ニ$i=1$トスレバ IV ハ

$$a_{jk}=0, \quad j, k \neq 1;$$

II ハ $a_{1j}=-a_{j1}$, $a_{11}=0$

トナル。Zerfallen ノ條件ハ

(Z) $a_{jk}=0$, $a_{1j}=-t_j$ $\quad j, k \neq 1$

即チ$t_1=0$, $t_j=-a_{1j}$トオケバ常ニ滿足サレル。

故ニ此ノ場合ハ必ズ zerfallen スル。

$$\begin{cases} u_i \circ u_j = 0 \\ u_1 \circ v = v \\ u_j \circ v = 0, \quad j \neq 1 \end{cases}$$